Activitat competencial 1. Endevinar edats

1. c)

2. d)

3. A ab, la a correspon a les desenes i la b correspon a les unitats. Per tant, es tracta del nombre $10 \cdot a + b$.
- Si es dóna la resposta justificada: 2 punts.
- Si es dóna la resposta sense justificar: 1 punt.

4. L'operació serveix per a qualsevol mes i edat; per exemple, suposem un noi que neix al setembre i que té 16 anys. El mes és 9, que multiplicat per 2 és 18. Si hi sumem 5 fa 23. En multiplicar-ho per 50 en resulta 1150. Si se li suma 16 en resulta 1166 i, finalment, en restar-ne 20, dóna 916: l'edat són 16 anys i el mes és el 9.
- Si es calcula correctament: 2 punts.
- Si hi ha un error: 1 punt.

5. Aquestes són les possibles ternes el producte de les quals és 36:

Filla petita	Filla mitjana	Filla gran	Producte	Suma
1	1	36	36	38
1	2	18	36	21
1	3	12	36	16
1	4	9	36	14
1	6	6	36	13
2	2	9	36	13
2	3	6	36	11
3	3	4	36	10

Només en dos casos hi pot haver dubte, ja que hi ha dos casos que sumen 13. Aquest és el motiu pel qual l'amic no pot saber les edats de les filles: (1, 6, 6) i (2, 2, 9).
En dir que la gran toca el piano no pot ser (1, 6, 6) perquè n'hi ha dues que són les grans, per tant, és (2, 2, 9).
- Si es dóna el resultat de manera justificada: 3 punts.
- Si hi ha la majoria de les possibles edats però no arriba al resultat: 2 punts.
- Si hi ha algunes de les possibles edats: 1 punt.

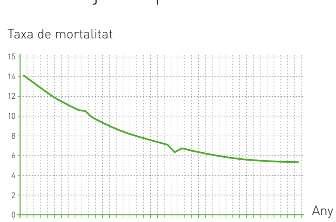
Activitat competencial 2. El creixement d'una població

1. d)

2. b)

3. Atès que $r = TN - TM$, si $r > 0$, llavors TN > TM, i, per tant, la població creix en la propera generació. Si $r = 0$, llavors TN = TM, i, per tant, la població de la següent generació roman constant.
- Si es donen les dues respostes justificades: 2 punts.
- Si no es justifiquen o només n'hi ha una de bé: 1 punt.

4.



- Si la gràfica és correcta: 2 punts.
- Si hi ha un error: 1 punt.

5. a) La població després de n generacions és $P_n = P_0(1 + r)^n$. Per tant, passats 2 anys passen $n = 10$ generacions, amb la qual cosa $P_{10} = 200(1 + 0{,}35)^{10} = 4021$ individus.

b) Apliquem els valors a la fórmula $100\,000 = 200(1{,}35)^n$, per tant, $500 = (1{,}35)^n$, d'on $ln\,500 = n \cdot ln\,1{,}35$.
Si aïllem n: $n = \frac{\ln 500}{\ln 1{,}35} = 20{,}7$. Fan falta com a mínim 21 generacions. Com que es reprodueixen 5 vegades l'any, calen 4 anys i uns 2 mesos i mig.
- Si es donen les dues respostes correctes: 3 punts.
- Si hi ha un error: 2 punts.
- Si hi ha dos errors: 1 punt.

Activitat competencial 3. Or de llei

1. c)

2. b)

3. 3300 g d'or de 1a llei estan formats per 18/24 parts d'or pur; per tant, 225 g d'or pur. En 400 g d'or de 2a llei hi ha 14/24 parts d'or pur, per tant, 233,33 g d'or pur. En total, aquesta barreja conté 225 + 233,33 = 458,33 g d'or pur sobre els 700 g totals. Per tant, la seva puresa és de (458,33 : 700) · 100 = 65,48%.
- Si hi ha el resultat i les operacions: 2 punts.
- Si hi ha el resultat sense les operacions o si hi ha un error: 1 punt.

4. L'or de 1a llei té una proporció d'or pur de 18/24. Si a la quantitat d'or de 2a llei (14/24) que té en Jordi li sumem x grams d'or pur, tenim una barreja amb les proporcions següents: $\frac{\text{g d'or pur}}{\text{g en total}} = \frac{350 \cdot (14/24) + x}{24 + x} = \frac{18}{24}$.
Per tant, $24 \cdot [350 \cdot (14/24) + x] = 18 \cdot (350 + x)$, que és $350 \cdot 14 + 24x = 18 \cdot 350 + 18x \rightarrow 24x - 18x = 350 \cdot (18 - 14) \rightarrow$
$\rightarrow 6x = 350 \cdot 4 \rightarrow 6x = 1400 \rightarrow x = 233$ g d'or pur.
- Si hi ha el resultat amb les operacions: 2 punts.
- Si hi ha el resultat sense les operacions o si hi ha un error: 1 punt.

5. Coure. Es poden fabricar 15 braçalets d'or rosa, que són els que contenen més quantitat de coure, per tant, com a mínim hi ha 15 · 20 = 300 g de coure i, com que no s'arriba a 16 braçalets, com a màxim hi ha 16 · 20 = 320 g.
Argent. Es poden fabricar 14 braçalets d'or groc, que són els que tenen més quantitat d'argent; per tant, com a mínim hi ha 14 · 12,5 = 175 g d'argent i, com que no s'arriba a 15 braçalets, com a màxim hi ha: 15 · 12,5 = 187,5 g.
Pal·ladi. Només es poden fabricar 5 braçalets d'or blanc, per tant, com a mínim hi ha 5 · 16 = 80 g de pal·ladi i com a màxim no n'hi ha, ja que no arriba per fer-ne 6 braçalets, 6 · 16 = 96 g.
- Si es donen i es raonen els sis resultats: 3 punts.
- Si hi ha dos resultats bé o només es donen totes les quantitats mínimes: 2 punts.
- Si hi ha un resultat bé: 1 punt.

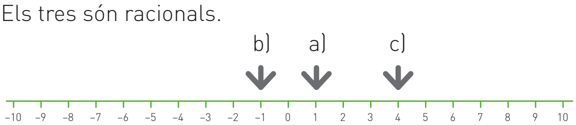
Activitat competencial 4. Aquest nombre no és racional

1. c)

2. 2 punts per a) i c) / 1 punt per a) o b).

3. Els incommensurables contradeien la visió aritmètica dels pitagòrics. En canvi, en els estudis de geometria tenien diverses aplicacions directes, com ara calcular la longitud de la diagonal d'un quadrat de costat 1.
- Si es dóna una resposta justificada: 2 punts.
- Si es dóna alguna idea correcta: 1 punt.

4. Els tres són racionals.



- Si es representen correctament i es diu que són racionals: 2 punts. / • Si hi ha un error: 1 punt.

5. a) En el pentàgon hi ha tres tipus de triangles isòsceles semblants entre si. Com que $DE = DK = 1$, per ser DEK isòsceles, es té que $AK = AD - DK = d - 1$.
b) Com que ADB és semblant a ABK, es té que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AK}$.
Com que $AD = d$, $AB = 1$ i $AK = d - 1$ es té $\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1}$.
c) La diagonal d s'obté resolent l'equació anterior: $d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$, la solució positiva de la qual és el nombre auri, $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
- Si es donen les tres respostes: 3 punts.
- Si es donen dues respostes: 2 punts.
- Si hi ha una resposta bé: 1 punt.

Activitat competencial 5. Maquinària agrícola

1. b)

2. 2 punts per c) i g). 1 punt per c) o g).

3. Si d és el descompte de l'arada, $2d$ és el descompte del remolc i x és el preu inicial, resulta que el preu inicial del remolc és $x - \frac{x \cdot 2d}{100} = 280$ i el preu inicial de l'arada és $x - \frac{x \cdot d}{100} = 340$.
Tenim un sistema de dues equacions amb dues incògnites:
$\begin{cases} 100x - x \cdot 2d = 28000 \\ 100x - x \cdot d = 34000 \end{cases}$. Restem a la segona la primera,
$x \cdot d = 6000 \rightarrow d = \frac{6000}{x}$. Substituint a la segona s'obté $100x - x \cdot \frac{6000}{x} = 34000 \rightarrow 100x - 6000 = 34\,000 \rightarrow$
$\rightarrow 100x = 40000 \rightarrow x = 400$. Per tant, el remolc i l'arada van costar 400 pises. Com que $d = \frac{6000}{x} = \frac{6000}{400} = 15\%$ de descompte en l'arada. En el remolc el descompte és el doble: $15 \cdot 2 = 30\%$.

4. Si x = preu del carretó, y = preu de la mànega i z = preu de la pala, obtenim el sistema
$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x = 2y \\ y + z - 1 = x \end{cases}$, resulta $x = 4$ pises, $y = 2$ pises i $z = 3$ pises.

5. Si x, y, z és el preu de les plantes, les llavors i l'adob respectivament, el preu de les plantes més les llavors és tres vegades el preu de l'adob. La diferència entre el preu de les plantes i el de les llavors és dues vegades més que les llavors i l'adob junts. D'aquesta manera, $x = 20$ pises, $y = 4$ pises i $z = 8$ pises.
- Per l'elaboració i la resolució del problema: 3 punts.
- Si hi ha un error: 2 punts.
- Si hi ha dos errors: 1 punt.

Activitat competencial 6. Venda d'entrepans

1. d)

2. 2 punts per b) i h). 1 punt per b) o h).

3. Primer cal passar de grams a quilograms.
En resulta la inequació següent: $0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z \leq 100$.
- Si s'expressa correctament la inequació: 2 punts.
- Si hi ha un error: 1 punt.

4. $\begin{cases} 10x + 15y \geq 2000 \\ 40x + 35y \leq 6000 \end{cases}$
- Si es dóna el sistema correcte: 2 punts.
- Si hi ha una inequació bé o si es barregen quilograms i grams: 1 punt.

5. a) $\begin{cases} x \leq y \\ x + y \leq 200 \end{cases}$
b) Tenint en compte que els entrepans han de ser un nombre natural, les possibles solucions són: ($x = 0$, $y = 0$), ($x = 1$, $y = 0$), ... ($x = 200$, $y = 0$); per a $y = 0$ hi ha 201 solucions. ($x = 1$, $y = 1$), ($x = 2$, $y = 1$), ... ($x = 199$, $y = 1$); per a $y = 1$ hi ha 199 solucions... i així successivament. Per tant, el nombre de solucions és: $201 + 199 + 197 + ... + 1 = (201 + 1) \cdot 101/2 =$ $= 10\,201$ solucions.
c) En aquest tipus de problemes els màxims i els mínims s'obtenen en els extrems. En aquest cas, per a ($x = 0$, $y = 0$) s'obtenen 0 pises, mínim; per a ($x = 100$, $y = 100$) s'obté un benefici de $100 \cdot 8 + 100 \cdot 10 = 1800$ pises; i per a ($x = 200$, $y = 0$) s'obté un benefici de $200 \cdot 8 = 1600$ pises. Per tant, s'obté el màxim benefici fent 100 entrepans Mega i 100 entrepans Bravo.
- Si hi apareixen les tres respostes: 3 punts.
- Si n'hi ha dues de bé: 2 punts.
- Si n'hi ha una de bé: 1 punt.

Activitat competencial 7. Les rosquilles

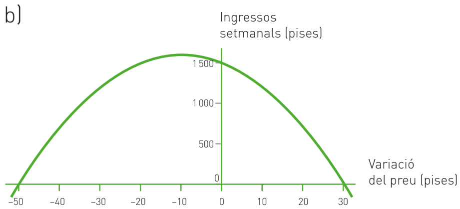
1. b)

2. 2 punts per b) i d). 1 punt per b) o d).

3. Durant la setmana es venen unes 27 + 30 + 32 + 33 + 50 + + 48 + 75 = 295 rosquilles. Si es divideix pels 7 dies de la setmana dóna 295 : 7 = 42,14 rosquilles/dia. Per tant, en Joan té raó.
- Si es dóna la resposta correcta i justificada: 2 punts.
- Si es dóna una quantitat de rosquilles venudes entre 250 i 350 a la setmana: 1 punt.

4. Si x = pises que hi ha de benefici i y = preu de cada rosquilla, tenim com a benefici actual: $\frac{x}{y} = 0{,}4$ i com a benefici amb l'augment: $\frac{x+1}{y+1} = 0{,}5$.
Es tracta d'un sistema de dues equacions amb dues incògnites la solució de les quals és $x = 2$ e $y = 5$. Per tant, ara es venen per 5 pises amb un benefici de 2 pises (40%) i amb l'augment es vendrien per 6 pises amb un benefici de 3 pises (50%).
- Si es dóna la resposta correcta i justificada: 2 punts.
- Si es dóna la solució sense justificar: 1 punt.

5. a) La funció és de la forma $f(x) = (5 + 0{,}1x) \cdot (300 - 10x) = -x^2 - 20x + 1500$.
b)



c) El màxim correspon a l'abscissa del vèrtex $x = -10$. Per tant, el preu que maximitza els ingressos és $5 + 0{,}1 \cdot (-10) = 5 - 1 = 4$ pises/rosquilla. Els ingressos són de $4 \cdot 400 = 1600$ pises.
- Si es donen les tres respostes correctes: 3 punts.
- Si hi dues respostes correctes: 2 punts.
- Si es dóna una resposta bé: 1 punt.

Activitat competencial 8. La sortida d'en Xesc

1. d)

2. c)

3. La velocitat és la derivada de l'espai respecte del temps: $v(t) = 10t$ m/s. L'acceleració és la derivada de la velocitat respecte del temps: $a(t) = 10$ m/s^2.
- Si es donen les dues respostes correctament: 2 punts.
- Si hi ha una resposta bé (incloses unitats): 1 punt.

4.

Paràbola.
- Si es dibuixa la gràfica i s'identifica que és una paràbola: 2 punts.
- Si s'equivoca en algun dels dos resultats: 1 punt.

5. a) Conceptualment és correcte, ja que la velocitat instantània és el límit de la velocitat mitjana quan l'interval de temps considerat tendeix a 0.
b) No és el millor mètode. És millor fer servir una derivada de l'espai respecte del temps, en aquest cas, $v(t) = 10t$.
c) Es calcula $v(t) = 10t$ per a $t = 4$, i en resulta 40 m/s.
- Si es donen les tres respostes: 3 punts.
- Si hi ha dues respostes: 2 punts.
- Si només n'hi ha una de bé: 1 punt.

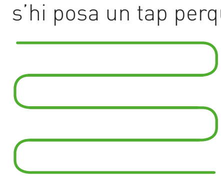
Activitat competencial 9. Regatge gota a gota

1. c)

2. b)

3. La dada de partida és la quantitat de canonada perimetral: $y + 2x = 300$. Per tant, $y = 300 - 2x$. En substituir y a l'àrea que es vol maximitzar $A(x, y)$ s'obté una nova funció que només depèn de la variable x: $A(x) = x(300 - 2x) = 300x - 2x^2$. Si derivem aquesta funció contínua trobem els màxims i els mínims: $A'(x) = 300 - 4x$. Igualant a 0 s'obté $300 - 4x = 0 \rightarrow x = 75$ m. Per comprovar que és un màxim hem de substituir a la segona derivada: $A''(x) = -4 < 0$. Per tant, es tracta d'un màxim. Les dimensions que maximitzen la superfície de l'hort són $x = 75$; $y = 150$.
- Si es dóna la solució fent servir derivades: 2 punts.
- Si es dóna la solució o es fan servir derivades però es comet un error: 1 punt.

4. La resposta és oberta, però no ha de ser un circuit tancat. Serveix, per exemple, plegar-la el múltiples colzes. Al final s'hi posa un tap perquè l'aigua no s'escoli.



- Si hi apareix una instal·lació similar: 2 punts.
- Si conté part del concepte exposat: 1 punt.

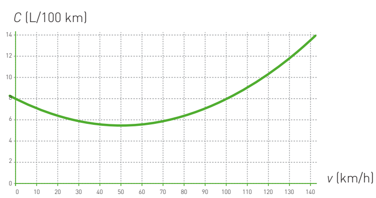
5. La dada de partida és la quantitat de canonada perimetral, $y + 4x = 300 \rightarrow y = 300 - 4x$. En substituir el que ens dóna y a l'àrea que es vol maximitzar $A(x, y)$ en resulta una nova funció que depèn únicament de la variable x: $A(x) = x(300 - 4x) = 300x - 4x^2$. Derivant aquesta funció contínua podem trobar els màxims i els mínims, $A'(x) = 300 - 8x$. Igualant a 0 obtenim el valor de x: $300 - 8x = 0 \rightarrow x = 37{,}5$ m. Per comprovar que es tracta d'un màxim hem de substituir en la segona derivada $A''(x) = -8 < 0$. Es tracta d'un màxim, per tant, les dimensions que maximitzen l'hort són $x = 37{,}5$ m i $y = 150$ m.
- Si es dóna la solució fent servir derivades: 3 punts.
- Si es dóna la solució o es fan servir derivades però hi ha un error: 2 punts.
- Si s'exposen alguns conceptes correctes: 1 punt.

Activitat competencial 10. Consum del cotxe

1. 8 L cada 100 km, per tant, 16 L en 200 km.

2. 2 punts per c) i f). 1 punt per c) o f).

3. a) V, b) F, c) V, d) V
   - Si es responen totes correctament: 2 punts.
   - Si hi ha un error: 1 punt.

4. 

   Paràbola de vèrtex (50, 5,5).
   - Si es dibuixa la gràfica i el vèrtex: 2 punts.
   - Si hi ha un error: 1 punt.

5. $C'(x) = 0{,}002x - 0{,}1$. Esbrinant quan la derivada és positiva i quan és negativa, podem saber quan la funció és creixent i quan és decreixent. Esbrinant quan s'anul·la es poden obtenir els possibles màxims i mínims. En aquest cas la derivada és negativa i, per tant, la funció consum $C(x)$ és decreixent des de $x = 0$ (ja que no té sentit parlar de velocitats negatives en aquest cas) fins a $x = 50$ km/h. La derivada és positiva, per tant, la funció consum $C(x)$ és creixent des de 50 km/h. Per a $x = 50$ km/h hi ha un mínim, ja que es tracta d'una funció contínua que abans d'aquest valor decreix i després creix.
   - Si s'explica la derivada, el creixement, el decreixement i el mínim: 3 punts. / • Si hi falta una resposta: 2 punts. / • Si hi ha alguna cosa bé: 1 punt.

Activitat competencial 11. Capses per a pizzes

1. d)

2. 2 punts per b) i c). 1 punt per b) o c).

3. Hi ha molts problemes d'optimització de geometria en què la solució és una figura regular. Però no en aquest cas, en tenir diferent valor el preu dels materials (les cares laterals són més cares).
   - Si s'explica que en part té raó però que en aquest cas no es compleix: 2 punts.
   - Si hi apareix una de les dues idees: 1 punt.

4. La funció que s'ha de maximitzar és la funció volum $V(x, y) = x^2 \cdot y$. Com que el preu de la capsa ha de ser 96 pises: $96 = 0{,}01 \cdot 2x^2 + 0{,}1 \cdot 4xy$. Es multiplica per 100 per eliminar els decimals $9600 = 2x^2 + 40xy$. S'aïlla i s'obté $y = \frac{9600 - 2x^2}{40x}$. De manera que la funció volum és $V(x) = x^2 \cdot \frac{9600 - 2x^2}{40x} = \frac{1}{40}\left(9600x - 2x^3\right)$. Per calcular el màxim es deriva: $V'(x) = \frac{1}{40}\left(9600 - 6x^3\right)$. Igualem a 0 i obtenim $x = 40$. La segona derivada per a $x = 40$ és negativa, per tant, $x = 40$ i substituint en resulta $y = 4$ cm.
   - Si es calcula fent servir derivades: 2 punts.
   - Si hi ha un error o no es fan servir derivades: 1 punt.

5. La funció que s'ha de minimitzar és la funció àrea del cilindre $A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h$. La dada que coneixem és el volum $500 = \pi r^2 h$, s'on a $h = \frac{500}{\pi r^2}$. Per tant, $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} = \pi r^2 + 1000\,\frac{1}{r}$. Derivant queda: $A'(r) = 2\pi r + 1000\,\frac{-1}{r^2}$. S'iguala a 0 la derivada i s'obté: $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = 5{,}42$ cm. Substituint en la segona derivada dóna positiu, per tant, es tracta d'un mínim. L'altura és $h = \frac{500}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}\right)^2} = 5{,}42\,\text{cm}$.
   - Si es dóna la solució raonadament: 3 punts.
   - Si només es comet un error: 2 punts.
   - Si com a mínim calcula $A(r)$: 1 punt.

Activitat competencial 12. L'epidemiòloga

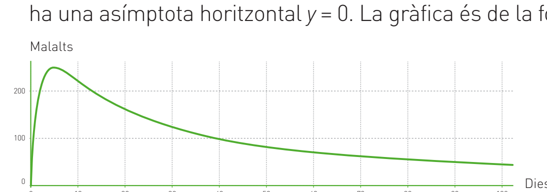
1. a)

2. b)

3. A llarg termini el nombre de malalts va disminuint. D'aquí a un any quedaran uns 13 malalts i d'aquí a 2 anys només 6 malalts. En 15 anys el nombre de malalts resultaria inferior a 1. Efectivament, hi ha una asímptota, en aquest cas, $y = 0$.
   - Si hi ha les dues respostes i justificades: 2 punts.
   - Si només hi ha una resposta justificada: 1 punt.

4. La derivada simplificada de la funció $E(x) = \frac{5000x}{(x+5)^2}$ és $E'(x) = \frac{5000 \cdot (x+5) - 5000 \cdot x \cdot 2}{(x+5)^3}$. Com que es treballa amb dies, el denominador de la derivada sempre és positiu. De manera que la derivada serà positiva o negativa i, per tant, la funció creixent o decreixent, depenent únicament del numerador. $E'(x) = 0 \rightarrow x = 5$. Donant valors o fent servir una taula de signes s'observa que la funció és creixent des de $x = 0$ fins a $x = 5$ i decreixent a partir de $x = 5$.
   - Si es calcula la derivada i dóna els resultats: 2 punts.
   - Si hi ha un error: 1 punt.

5. Per calcular el màxim igualem la derivada a 0, la solució de la qual és $x = 5$. Per a aquesta abscissa s'obté el punt (5, 250). Hi ha una asímptota horitzontal $y = 0$. La gràfica és de la forma:



   Hi ha un punt d'inflexió perquè hi ha un canvi de curvatura:
   - Si la resposta és completa: 3 punts. / • Si hi ha un error: 2 punts. / • Si hi ha dos errors: 1 punt.