Actividad competencial 1. Adivinar edades

1. c)

2. d)

3. En *ab*, la *a* corresponde a las decenas y la *b* corresponde a las unidades. Por tanto se trata del número $10 \cdot a + b$.
- Si se da la respuesta justificada. 2 puntos.
- Si se da la respuesta sin justificar: 1 punto.

4. La operación sirve para cualquier mes y edad, así, por ejemplo, supongamos un chico que nace en septiembre y tiene 16 años. El mes es 9, que multiplicado por 2 es 18. Al sumarle 5 da 23. Al multiplicarlo por 50 resulta 1150. Si se le suma 16 resulta 1166 y finalmente, al restar 250 da 916: la edad son 16 años, y el mes es el 9.º.
- Si lo calcula correctamente: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

5. Estas son las posibles ternas cuyo producto es 36:

Hija menor	Hija mediana	Hija mayor	Producto	Suma
1	1	36	36	38
1	2	18	36	21
1	3	12	36	16
1	4	9	36	14
1	6	6	36	13
2	2	9	36	13
2	3	6	36	11
3	3	4	36	10

Solo en dos casos puede haber duda, pues hay dos casos que suman 13. Ese es el motivo por el que el amigo no puede saber las edades de las hijas: (1, 6, 6) y (2, 2, 9).
Al decir que la mayor toca el piano no puede ser (1, 6, 6) porque hay dos que son las mayores, por lo tanto es (2, 2, 9).
- Si se da el resultado de forma justificada: 3 puntos.
- Si aparecen la mayoría de las posibles edades pero no llega al resultado: 2 puntos.
- Si aparecen algunas de las posibles edades: 1 punto.

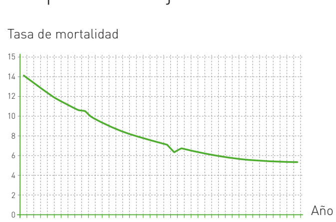
Actividad competencial 2. El crecimiento de una población

1. d)

2. b)

3. Dado que r = TN − TM, si $r > 0$, entonces TN > TM, y por lo tanto, la población crece en la próxima generación. Si $r = 0$, entonces TN = TM, y por tanto la población de la siguiente generación permanece constante.
- Si se dan las dos respuestas justificadas: 2 puntos.
- Si aparecen sin justificar o solo una bien: 1 punto.

4.



- Si la gráfica es correcta: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

5. a) La población tras n generaciones es $P_n = P_0(1 + r)^n$. Por lo tanto, al cabo de 2 años pasan $n = 10$ generaciones, con lo que $P_{10} = 200(1 + 0{,}35)^{10} = 4021$ individuos.

b) Aplicamos los valores en la fórmula $100\,000 = 200(1{,}35)^n$, por lo tanto, $500 = (1{,}35)^n$, de donde $\ln 500 = n \cdot \ln 1{,}35$.
Despejando n: $n=\frac{\ln 500}{\ln 1{,}35}=20{,}7$. Hacen falta como mínimo 21 generaciones. Como se reproducen 5 veces al año, son necesarios 4 años y unos 2 meses y medio.
- Si se dan las dos respuestas correctas: 3 puntos.
- Si hay un error: 2 puntos.
- Si hay dos errores: 1 punto.

Actividad competencial 3. Oro de ley

1. c)

2. b)

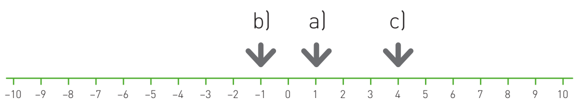
3. 300 g de oro de 1.ª ley están formados por 18/24 partes de oro puro; por lo tanto, 225 g de oro puro. En 400 g de oro de 2.ª ley hay 14/24 partes de oro puro, por tanto 233,33 g de oro puro. En total, esta mezcla contiene 225 + 233,33 = = 458,33 g de oro puro sobre los 700 g totales. Por lo tanto, su pureza es de (458,33 : 700) · 100 = 65,48%.
- Si aparece el resultado con las operaciones. 2 puntos.
- Si aparece el resultado sin operaciones o hay un error: 1 punto.

4. El oro de 1.ª ley tiene un proporción de oro puro de 18/24. Si a la cantidad de oro de 2.ª ley (14/24) que tiene Jorge le sumamos x gramos de oro puro tenemos una mezcla con las siguientes proporciones: $\frac{\text{g de oro puro}}{\text{g en total}}=\frac{350\cdot(14/24)+x}{24+x}=\frac{18}{24}$.
Por lo tanto, $24 \cdot [350 \cdot (14/24) + x] = 18 \cdot (350 + x)$, que es $350 \cdot 14 + 24x = 18 \cdot 350 + 18x \rightarrow 24x - 18x = 350 \cdot (18 - 14) \rightarrow$ $\rightarrow 6x = 350 \cdot 4 \rightarrow 6x = 1400 \rightarrow x = 233$ g de oro puro.
- Si aparece el resultado con las operaciones: 2 puntos.
- Si aparece el resultado sin operaciones o hay un error: 1 punto.

5. Cobre. Se pueden fabricar 15 pulseras de oro rosa, que son las que contienen mayor cantidad de cobre, por lo tanto como mínimo hay 15 · 20 = 300 g de cobre y como máximo hay, ya que no llega para fabricar 16 pulseras, 16 · 20 = 320 g.
Plata. Se pueden fabricar 14 pulseras de oro amarillo, que son las que tienen mayor cantidad de plata, por lo tanto como mínimo hay 14 · 12,5 = 175 g de plata y como máximo hay, ya que no llega para fabricar 15 pulseras: 15 · 12,5 = 187,5 g.
Paladio. Solo pueden fabricarse 5 pulseras de oro blanco, por lo tanto como mínimo hay 5 · 16 = 80 g de paladio y como máximo hay, ya que no llega para fabricar 6 pulseras, 6 · 16 = 96 g.
- Si se dan y se razonan los tres resultados: 3 puntos.
- Si hay dos resultados bien o solo se dan todas las cantidades mínimas: 2 puntos.
- Si hay un resultado bien: 1 punto.

Actividad competencial 4. Este número no es racional

1. c)
2. 2 puntos por a) y c). 1 punto por a) o b).
3. Los inconmensurables contradecían la visión aritmética de los pitagóricos. En cambio, en los estudios de geometría tenían diversas aplicaciones directas, como por ejemplo, calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1.
   • Si se da una respuesta justificada: 2 puntos.
   • Si se da alguna idea correcta: 1 punto.
4. Los tres son racionales.



   • Si se representan correctamente y se indica que son racionales: 2 puntos. / • Si hay un error: 1 punto.
5. a) En el pentágono aparecen tres tipos de triángulos isósceles semejantes entre sí. Como $DE = DK = 1$, por ser DEK isósceles, se tiene que $AK = AD - DK = d - 1$.
   b) Como ADB es semejante a ABK se tiene que $\frac{AD}{AB} = \frac{AB}{AK}$.
   Como $AD = d$, $AB = 1$ y $AK = d - 1$ se tiene $\frac{d}{1} = \frac{1}{d-1}$.
   c) La diagonal d se obtiene resolviendo la ecuación anterior: $d^2 - d = 1 \rightarrow d^2 - d - 1 = 0$, cuya solución positiva es el número áureo, $d = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.
   • Si se dan las tres respuestas: 3 puntos.
   • Si se dan dos respuestas: 2 puntos.
   • Si hay una bien: 1 punto.

Actividad competencial 5. Maquinaria agrícola

1. b)
2. 2 puntos por c) y g). 1 punto por c) o g).
3. Siendo d el descuento del arado, $2d$ el descuento del remolque y x el precio inicial, resulta que el precio inicial del remolque es $x - \frac{x \cdot 2d}{100} = 280$ y el precio inicial del arado es $x - \frac{x \cdot d}{100} = 340$.
   Tenemos un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas: $\begin{cases} 100x - x \cdot 2d = 28000 \\ 100x - x \cdot d = 34000 \end{cases}$. Restamos a la segunda la primera, $x \cdot d = 6000 \rightarrow d = \frac{6000}{x}$. Sustituyendo en la segunda se obtiene $100x - x \cdot \frac{6000}{x} = 34000 \rightarrow 100x - 6000 = 34\,000 \rightarrow$
   $\rightarrow 100x = 40000 \rightarrow x = 400$. Por lo tanto, el remolque y el arado han costado 400 pisas. Como $d = \frac{6000}{x} = \frac{6000}{400} = 15\%$ de descuento en el arado. En el remolque el descuento es el doble: $15 \cdot 2 = 30\%$.
4. Siendo x = precio de la carretilla, y = precio de la manguera y z = precio de la pala, obtenemos el sistema
   $\begin{cases} x + y + z = 9 \\ x = 2y \\ y + z - 1 = x \end{cases}$, resulta $x = 4$ pisas, $y = 2$ pisas y $z = 3$ pisas.
5. Siendo x, y, z el precio de las plantas, las semillas y el abono respectivamente, el precio de las plantas más las semillas es tres veces el precio del abono. La diferencia entre el precio de las plantas y el de las semillas es dos veces el precio del abono. Las plantas cuestan 8 pisas más que las semillas y el abono juntos. De este modo, $x = 20$ pisas, $y = 4$ pisas y $z = 8$ pisas.
   • Por la elaboración y resolución del problema: 3 puntos.
   • Si hay un error: 2 puntos.
   • Si hay dos errores: 1 punto.

Actividad competencial 6. Vendiendo bocadillos

1. d)
2. 2 puntos por b) y h). 1 punto por b) o h).
3. Primero es preciso pasar de gramos a kilogramos. Resulta la siguiente inecuación: $0{,}3x + 0{,}4y + 0{,}5z \leq 100$.
   • Si se expresa correctamente la inecuación: 2 puntos.
   • Si hay un error: 1 punto.
4. $\begin{cases} 10x + 15y \geq 2000 \\ 40x + 35y \leq 6000 \end{cases}$
   • Si se da el sistema correcto: 2 puntos.
   • Si hay una inecuación bien o si se mezclan kilogramos y gramos: 1 punto.
5. a) $\begin{cases} x \leq y \\ x + y \leq 200 \end{cases}$
   b) Teniendo en cuenta que los bocadillos han de ser un número natural, las posibles soluciones, son: ($x = 0$, $y = 0$), ($x = 1$, $y = 0$), ... ($x = 200$, $y = 0$); para $y = 0$ hay 201 soluciones. ($x = 1$, $y = 1$), ($x = 2$, $y = 1$), ... ($x = 199$, $y = 1$); para $y = 1$ hay 199 soluciones... y así sucesivamente. Por lo tanto, el número de soluciones es: $201 + 199 + 197 + ... + 1 = (201 + 1) \cdot 101/2 =$ $= 10\,201$ soluciones.
   c) En este tipo de problemas los máximos y los mínimos se obtienen en los extremos. En este caso, para ($x = 0$, $y = 0$) se obtienen 0 pisas, mínimo; para ($x = 100$, $y = 100$) se obtiene un beneficio de $100 \cdot 8 + 100 \cdot 10 = 1800$ pisas; y para ($x = 200$, $y = 0$) se obtiene un beneficio de $200 \cdot 8 =$ $= 1600$ pisas. Por lo tanto, se obtiene el máximo beneficio haciendo 100 bocadillos Mega y 100 bocadillos Bravo.
   • Si aparecen las tres respuestas: 3 puntos.
   • Si hay dos bien: 2 puntos.
   • Por una bien: 1 punto.

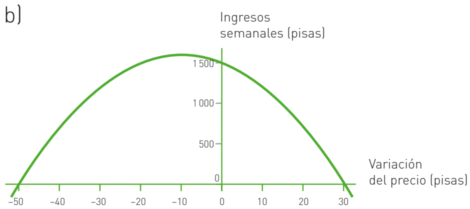
Actividad competencial 7. Las rosquillas

1. b)
2. 2 puntos por b) y d). 1 punto por b) o d).

3. Durante la semana se venden unas 27 + 30 + 32 + 33 + 50 + + 48 + 75 = 295 rosquillas. Al dividirlo por los 7 días de la semana da 295 : 7 = 42,14 rosquillas/día. Por lo tanto Juan está en lo cierto.
- Si se da la respuesta correcta justificada: 2 puntos.
- Si se da una cantidad de rosquillas vendidas entre 250 y 350 en la semana: 1 punto.

4. Si x = pisas que hay de beneficio e y = precio de cada rosquilla, tenemos como beneficio actual: $\frac{x}{y} = 0{,}4$
y como beneficio con la subida: $\frac{x+1}{y+1} = 0{,}5$.
Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es $x = 2$ e $y = 5$. Por tanto, ahora se venden por 5 pisas con un beneficio de 2 pisas (40%) y con la subida se venderían por 6 pisas con un beneficio de 3 pisas (50%).
- Si se da la respuesta justificada: 2 puntos.
- Si se da la solución sin justificar: 1 punto.

5. a) La función es de la forma $f(x) = (5 + 0{,}1x) \cdot (300 - 10x) =$ $= -x^2 - 20x + 1500$.
b)



c) El máximo corresponde a la abscisa del vértice $x = -10$. Por lo tanto, el precio que maximiza los ingresos es $5 + 0{,}1 \cdot (-10) = 5 - 1 = 4$ pisas/rosquilla. Los ingresos son de $4 \cdot 400 = 1600$ pisas.
- Si se dan las tres respuestas correctas: 3 puntos.
- Si hay dos respuestas correctas: 2 puntos.
- Si se da una respuesta bien: 1 punto.

Actividad competencial 8. La salida de Checo

1. d)

2. c)

3. La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo: $v(t) = 10t$ m/s. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo: $a(t) = 10$ m/s^2.
- Si se dan las dos respuestas correctamente: 2 puntos.
- Si hay una respuesta bien (incluidas unidades): 1 punto.

4.

Parábola.
- Si dibuja la gráfica e identifica que es una parábola: 2 puntos.
- Si yerra en alguno de los dos resultados: 1 punto.

5. a) Conceptualmente es correcto, ya que la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a 0.
b) No es el mejor método. Es mejor utilizar la derivada del espacio respecto al tiempo, en este caso, $v(t) = 10t$.
c) Se calcula $v(t) = 10t$ para $t = 4$, resultando 40 m/s.
- Si se dan las tres respuestas: 3 puntos.
- Si aparecen dos: 2 puntos.
- Si hay solo una bien: 1 punto.

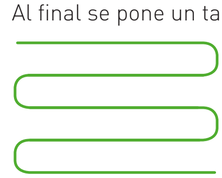
Actividad competencial 9. Riego por goteo

1. c)

2. b)

3. El dato de partida es la cantidad de tubería perimetral: $y + 2x = 300$. Por lo tanto, $y = 300 - 2x$. Al sustituir y en el área que se quiere maximizar $A(x, y)$ se obtiene una nueva función que depende únicamente de la variable x: $A(x) =$ $= x(300 - 2x) = 300x - 2x^2$. Derivando esta función continua hallamos los máximos y los mínimos: $A'(x) = 300 - 4x$. Igualando a 0 se obtiene $300 - 4x = 0 \rightarrow x = 75$ m. Para comprobar que es un máximo debemos sustituir en la segunda derivada: $A''(x) = -4 < 0$. Por lo tanto se trata de un máximo. Las dimensiones que maximizan la superficie del huerto son $x = 75$; $y = 150$.
- Si se da la solución utilizando derivadas: 2 puntos.
- Si se da la solución o se utilizan derivadas pero se comete un error: 1 punto.

4. La respuesta es abierta, pero no debe ser un circuito cerrado. Sirve por ejemplo, plegarla en múltiples codos. Al final se pone un tapón para que no se escape el agua.



- Si aparece una instalación similar: 2 puntos.
- Si contiene parte del concepto expuesto: 1 punto.

5. El dato de partida es la cantidad de tubería perimetral, $y + 4x = 300 \rightarrow y = 300 - 4x$. Al sustituir lo que nos da y en el área que se quiere maximizar $A(x, y)$ resulta una nueva función que depende únicamente de la variable x: $A(x) =$ $= x(300 - 4x) = 300x - 4x^2$. Derivando esta función continua podemos encontrar los máximos y los mínimos, $A'(x) = 300 - 8x$. Igualando a 0 obtenemos el valor de x: $300 - 8x = 0 \rightarrow x = 37{,}5$ m. Para comprobar que se trata de un máximo debemos sustituir en la segunda derivada $A''(x) = -8 < 0$. Se trata de un máximo, por lo tanto las dimensiones que maximizan el huerto son $x = 37{,}5$ m e $y = 150$ m.
- Si se da la solución utilizando derivadas: 3 puntos.
- Si se da la solución o se utilizan derivadas pero hay un error: 2 puntos.
- Si se exponen algunos conceptos correctos: 1 punto.

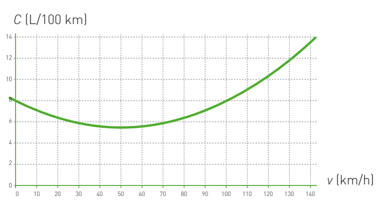
Actividad competencial 10. Consumo del coche

1. 8 L cada 100 km, por lo tanto, 16 L en 200 km.

2. 2 puntos por c) y f). 1 punto por c) o f).

3. a) V, b) F, c) V, d) V
- Si se contestan todas correctamente: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

4.



Parábola de vértice (50, 5,5).
- Si dibuja la gráfica y el vértice: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

5. $C'(x) = 0{,}002x - 0{,}1$. Averiguando cuándo la derivada es positiva y cuándo es negativa, podemos saber cuándo la función es creciente y cuándo es decreciente. Averiguando cuándo se anula pueden obtenerse los posibles máximos y mínimos. En este caso la derivada es negativa y por lo tanto la función consumo $C(x)$ es decreciente desde $x = 0$ (pues no tiene sentido hablar de velocidades negativas en este caso) hasta $x = 50$ km/h. La derivada es positiva, por tanto la función consumo $C(x)$ es creciente desde $x = 50$ km/h. Para $x = 50$ km/h hay un mínimo, pues se trata de una función continua que antes de este valor decrece y luego crece.
- Si se explica la derivada, el crecimiento, el decrecimiento y el mínimo: 3 puntos. / • Si falta una respuesta: 2 puntos. / • Si hay algo bien: 1 punto.

Actividad competencial 11. Unas cajas para pizzas

1. d)

2. 2 puntos por b) y c). 1 punto por b) o c).

3. Hay muchos problemas de optimización de geometría donde la solución es una figura regular. Pero no en este caso, al tener distinto valor el precio de los materiales (las caras laterales son más caras).
- Si se explica que en parte tiene razón pero que en este caso no se cumple: 2 puntos.
- Si aparece una de las dos ideas: 1 punto.

4. La función que hay que maximizar es la función volumen $V(x, y) = x^2 \cdot y$. Como el precio de la caja debe ser 96 pisas: $96 = 0{,}01 \cdot 2x^2 + 0{,}1 \cdot 4xy$. Se multiplica por 100 para eliminar los decimales $9600 = 2x^2 + 40xy$. Se aísla y obteniéndose $y = \frac{9600 - 2x^2}{40x}$. De modo que la función volumen es $V(x) = x^2 \cdot \frac{9600 - 2x^2}{40x} = \frac{1}{40}(9600x - 2x^3)$. Para calcular el máximo se deriva: $V'(x) = \frac{1}{40}(9600 - 6x^3)$. Igualamos a 0 y obtenemos $x = 40$. La segunda derivada para $x = 40$ es negativa, por tanto $x = 40$ cm y sustituyendo resulta $y = 4$ cm.
- Si se calculan utilizando derivadas: 2 puntos.
- Si hay un error o no se utilizan derivadas: 1 punto.

5. La función que hay que minimizar es la función área del cilindro $A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h$. El dato que conocemos es el volumen $500 = \pi r^2 h$, de donde a $h = \frac{500}{\pi r^2}$. Por tanto, $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} = \pi r^2 + 1000\,\frac{1}{r}$. Derivando queda: $A'(r) = 2\pi r + 1000\,\frac{-1}{r^2}$. Se iguala a 0 la derivada y se obtiene: $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = 5{,}42$ cm. Sustituyendo en la segunda derivada da positivo, por lo tanto se trata de un mínimo. La altura es $h = \frac{500}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}\right)^2} = 5{,}42$ cm.
- Si se da la solución razonadamente: 3 puntos.
- Si solo se comete un error: 2 puntos.
- Si como mínimo calcula $A(r)$: 1 punto.

Actividad competencial 12. La epidemióloga

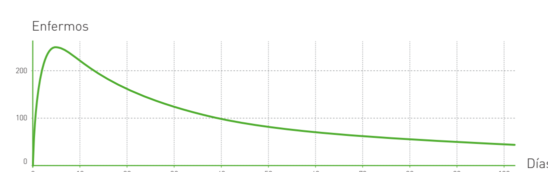
1. a)

2. b)

3. A largo plazo el número de enfermos va disminuyendo. Dentro de 1 año quedarían unos 13 enfermos y dentro de 2 años solo 6 enfermos. En 15 años el número de enfermos resultaría menor que 1. Efectivamente hay una asíntota, en este caso, $y = 0$.
- Si aparecen las dos respuestas justificadas: 2 puntos.
- Si solo hay una respuesta justificada: 1 punto.

4. La derivada simplificada de la función $E(x) = \frac{5000x}{(x+5)^2}$ es $E'(x) = \frac{5000 \cdot (x+5) - 5000 \cdot x \cdot 2}{(x+5)^3}$. Como se trabaja con días, el denominador de la derivada siempre es positivo. De modo que la derivada será positiva o negativa y por tanto la función creciente o decreciente, dependiendo únicamente del numerador. $E'(x) = 0 \rightarrow x = 5$. Dando valores o utilizando una tabla de signos se observa que la función es creciente desde $x = 0$ hasta $x = 5$ y decreciente a partir de $x = 5$.
- Si calcula la derivada y da los intervalos: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

5. Para calcular el máximo igualamos la derivada a 0, cuya solución es $x = 5$. Para esta abscisa se obtiene el punto (5, 250). Hay una asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica es de la forma:



Hay un punto de inflexión pues hay un cambio de curvatura.
- Si la respuesta está completa: 3 puntos. / • Si hay un error: 2 puntos. / • Si hay dos errores: 1 punto.