Actividad competencial 1. El videojuego futbolístico

1. d)

2. 2 puntos por a) y f). 1 punto por a) o f).

3. La forma de elegir 4 equipos de 16 posibles es mediante combinaciones, sin importar el orden:
$\binom{16}{4} = \frac{16!}{4! \times 12!} = \frac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2} = 1820$. El número de casos en los que hay 2 europeos y 2 sudamericanos es:
$\binom{8}{2} \times \binom{8}{2} = \frac{8!}{2! \times 6!} \times \frac{8!}{2! \times 6!} = \frac{8 \times 7}{2} \times \frac{8 \times 7}{2} = 28 \times 28 = 784$.
La probabilidad de que sean 2 europeos y 2 sudamericanos, usando la regla de Laplace es
$\frac{784}{1820} = 0.43$.
- Si se dan las dos respuestas: 2 puntos.
- Si hay una bien: 1 punto.

4. La probabilidad de ganar todos los partidos es de $0.7^3 = 0.343$. La probabilidad de que pierda al menos un partido = 1 – ganar todos los partidos = 1 – 0.343 = 0.657.
- Si se dan las dos respuestas: 2 puntos.
- Si hay una bien: 1 punto.

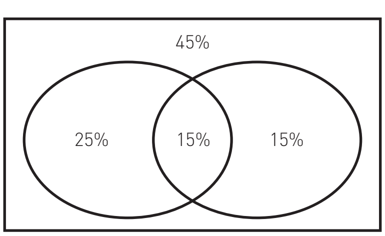
5. Primera ronda: Real Madrid CF *vs*. Nacional, Boca Juniors *vs*. Manchester United, Liverpool FC *vs*. Peñarol y FC Barcelona *vs*. Independiente. Semifinales: Real Madrid CF *vs*. Liverpool FC y Boca Juniors *vs*. Independiente. Final: Liverpool FC *vs*. Boca Juniors. Ganó: Liverpool FC.
- Si se dan los siete encuentros: 3 puntos.
- Si se cometen como máximo dos errores: 2 puntos.
- Si se cometen como máximo cuatro errores: 1 punto.

Actividad competencial 2. ¿Cómo nos informamos?

1. c)

2. 2 puntos por b) y d). 1 punto por b) o d).

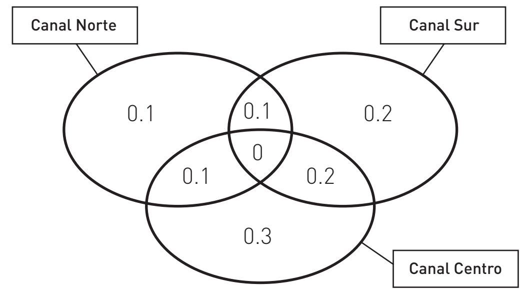
3. La probabilidad de que un encuestado lea el periódico, sea en papel o en digital, es decir, la unión, es:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.4 + 0.3 - 0.15 = 0.55$.



- Si se da el esquema y la respuesta argumentada: 2 puntos.
- Si hay algo bien: 1 punto.

4. La probabilidad de que no lea ni el periódico en papel ni en digital es $P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0.55 = 0.45$.
- Si se da la respuesta con los cálculos: 2 puntos.
- Si se da la respuesta sin cálculo alguno: 1 punto.

5.



- Si aparece el diagrama completo: 3 puntos.
- Si hay uno o dos errores: 2 puntos.
- Si hay tres o cuatro errores: 1 punto.

Actividad competencial 3. La boutique de ropa

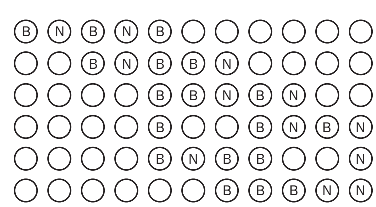
1. b)

2. 2 puntos por c), 1 punto por d).

3. Elegir tres vestidos de doce es una combinación de 12 elementos tomados de 3 en 3:
$\binom{12}{3} = 220$ combinaciones distintas. Si se quiere que haya un vestido de cada corte, es: $5 \times 4 \times 3 = 60$ formas distintas (se cuentan las formas de elegirlos, no las formas de ponerlos en el escaparate).
- Si se dan las dos soluciones: 2 puntos.
- Si hay una bien: 1 punto.

4. Se trata de permutaciones con repetición, pues importa el orden, intervienen todos los elementos y hay repetición de elementos (si bien también puede verse como combinaciones):
$\frac{12!}{5! \cdot 4! \cdot 3!} = 27720$ formas de colocarse.
- Si se da la respuesta razonada: 2 puntos.
- Si la respuesta o el razonamiento son correctos: 1 punto.

5.



- Si se muestran todas las probabilidades: 3 puntos.
- Si se cometen dos errores como máximo: 2 puntos.
- Si se cometen tres errores como máximo: 1 punto.

Actividad competencial 4. El profesor Jirafales

1. c)

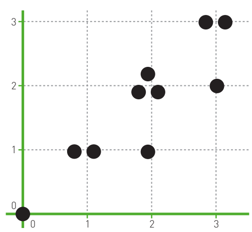
2. 2 puntos por d) y b). 1 punto por d) o b).

3.

x_i	0	1	2	2	3	3
y_i	0	1	1	2	2	3
f_i	1	2	1	3	1	2

- Si se completa la tabla: 2 puntos.
- Si hay un error como máximo: 1 punto.

4.



- Si aparece el gráfico correcto: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

5.

	X	Y
Media	1.90	1.70
Varianza	0.89	0.81
Desviación típica o estándar	0.94	0.90
Covarianza	0.77	
Coeficiente de correlación de Pearson	0.91	

- Si se dan todas las respuestas correctas: 3 puntos.
- Si se cometen dos errores como máximo: 2 puntos.
- Si se cometen tres errores como máximo: 1 punto.

Actividad competencial 5. El ritmo cardíaco de los lagartos

1. b)

2. h) y c)
- Si se dan las dos respuestas: 2 puntos.
- Si se da una respuesta bien: 1 punto.

3. La covarianza se calcula como $\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i \times y_i)}{n} - \bar{x}\times\bar{y}$.
Si resulta positiva indica que al aumentar una variable la otra también aumenta y si es negativa indica que si una variable disminuye la otra también lo hace.
- Si se da la fórmula y la relación: 2 puntos.
- Si una de las dos cosas es correcta: 1 punto.

4. Usando por ejemplo el coeficiente de Pearson r, que es el cociente entre la covarianza y el producto de las desviaciones típicas. En este caso $r=\frac{31.1}{(5.74\times 5.52)}=0.98$. Un valor muy próximo a 1 indica una correlación lineal positiva muy fuerte aunque no hay dependencia lineal.
- Si se da un coeficiente y se calcula: 2 puntos.
- Si se da al menos un coeficiente: 1 punto.

5. Siendo σ_x la desviación típica de X y σ_{xy} la covarianza de X e Y, se tiene que la ecuación de la recta de regresión de Y sobre X es: $y-\bar{y}=\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x-\bar{x})$.
En este caso: $l-\bar{l}=\frac{\sigma_{lT}}{\sigma_T^2}(T-\bar{T})$. Sustituyendo los valores: $l-30.53=\frac{31.1}{33}(T-31)$. Para $T = 35$ resulta que $l = 0.942 \times 4 + 30.53 = 34.3$ latidos/min.
- Si se da la respuesta justificada: 3 puntos.
- Si se justifica correctamente pero se comete un error de cálculo: 2 puntos.
- Si hay algo bien: 1 punto.

Actividad competencial 6. Mi tío el despistado

1. c)

2. 2 puntos por a) y b). 1 punto por a) o b).

3. De 30 días se eligen 3 en los que se olvida el bastón, esto es un número combinatorio. La probabilidad de que en esos tres días se olvide el bastón es $(1/8)^3$ y en los otros 27 no se debe olvidar el bastón, por lo tanto se multiplica por $(7/8)^{27}$.
P(olvidar 3 días) = $\binom{30}{3}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3\cdot\left(\frac{7}{8}\right)^{27}=0{,}216$.
- Si se da la respuesta con los cálculos: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

4. Esa probabilidad corresponde a que en una semana olvide el sombrero cinco días.
- Si se da la respuesta correcta: 2 puntos.
- Si se aprecia alguna idea correcta: 1 punto.

5. Hay una forma más sencilla. Consiste en aplicar que el contrario de «al menos una vez» es «ninguna vez», por tanto: P(al menos una vez olvide su bastón) = = 1 – P(todos los días olvide su bastón) = $1-\left(\frac{1}{8}\right)^{30}$. Esta probabilidad es próxima a 1, pero no es 1.
- Si aparece la respuesta correcta: 3 puntos.
- Si hay un error: 2 puntos.
- Si hay algo bien: 1 punto.

Actividad competencial 7. Las donas

1. b)

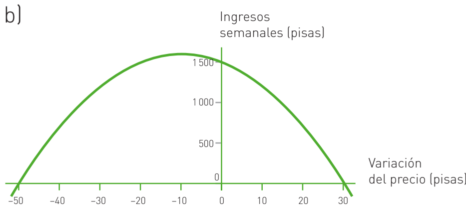
2. 2 puntos por b) y d). 1 punto por b) o d).

3. Durante la semana se venden unas 27 + 30 + 32 + 33 + 50 + + 48 + 75 = 295 donas. Al dividirlo entre los 7 días de la semana da 295 ÷ 7 = 42.14 donas/día. Por lo tanto Juan está en lo cierto.
- Si se da la respuesta correcta justificada: 2 puntos.
- Si se da una cantidad de donas vendidas entre 250 y 350 en la semana: 1 punto.

4. Si x = pisas que hay de ganancia e y = precio de cada dona, tenemos como ganancia actual: $\frac{x}{y}=0.4$ y como ganancia con el incremento: $\frac{x+1}{y+1}=0.5$.

Se trata de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas cuya solución es $x = 2$ e $y = 5$. Por tanto, ahora se venden por 5 pisas con una ganancia de 2 pisas (40%) y con el incremento se venderían por 6 pisas con una ganancia de 3 pisas (50%).
- Si se da la respuesta justificada: 2 puntos.
- Si se da la solución sin justificar: 1 punto.

5. a) La función es de la forma $f(x) = (5 + 0.1x) \times (300 - 10x) = -x^2 - 20x + 1500$.
b)



c) El máximo corresponde a la abscisa del vértice $x = -10$. Por lo tanto, el precio que maximiza los ingresos es $5 + 0.1 \times (-10) = 5 - 1 = 4$ pisas/dona. Los ingresos son de $4 \times 400 = 1600$ pisas.
- Si se dan las tres respuestas correctas: 3 puntos.
- Si hay dos respuestas correctas: 2 puntos.
- Si se da una respuesta bien: 1 punto.

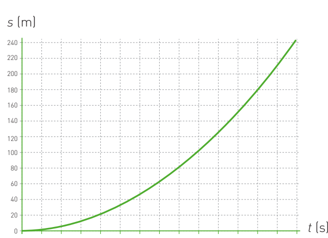
Actividad competencial 8. La salida de Checo

1. d)

2. c)

3. La velocidad es la derivada del espacio respecto del tiempo: $v(t) = 10t$ m/s. La aceleración es la derivada de la velocidad respecto del tiempo: $a(t) = 10$ m/s^2.
- Si se dan las dos respuestas correctamente: 2 puntos.
- Si hay una respuesta bien (incluidas unidades): 1 punto.

4.



Parábola.
- Si dibuja la gráfica e identifica que es una parábola: 2 puntos.
- Si yerra en alguno de los dos resultados: 1 punto.

5. a) Conceptualmente es correcto, ya que la velocidad instantánea es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo considerado tiende a 0.
b) No es el mejor método. Es mejor usar la derivada del espacio respecto al tiempo, en este caso, $v(t) = 10t$.
c) Se calcula $v(t) = 10t$ para $t = 4$, resultando 40 m/s.
- Si se dan las tres respuestas: 3 puntos.
- Si aparecen dos: 2 puntos.
- Si hay solo una bien: 1 punto.

Actividad competencial 9. Riego por goteo

1. c)

2. b)

3. El dato de partida es la cantidad de tubería perimetral: $y + 2x = 300$. Por lo tanto, $y = 300 - 2x$. Al sustituir y en el área que se quiere maximizar $A(x, y)$ se obtiene una nueva función que depende únicamente de la variable x: $A(x) = x(300 - 2x) = 300x - 2x^2$. Derivando esta función continua hallamos los máximos y los mínimos: $A'(x) = 300 - 4x$. Igualando a 0 se obtiene $300 - 4x = 0 \rightarrow x = 75$ m. Para comprobar que es un máximo debemos sustituir en la segunda derivada: $A''(x) = -4 < 0$. Por lo tanto se trata de un máximo. Las dimensiones que maximizan la superficie del huerto son $x = 75$; $y = 150$.
- Si se da la solución usando derivadas: 2 puntos.
- Si se da la solución o se usan derivadas pero se comete un error: 1 punto.

4. La respuesta es abierta, pero no debe ser un circuito cerrado. Sirve por ejemplo, plegarla en múltiples codos. Al final se pone un tapón para que no se escape el agua.

- Si aparece una instalación similar: 2 puntos.
- Si contiene parte del concepto expuesto: 1 punto.

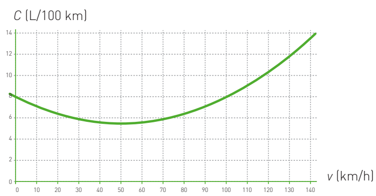
5. El dato de partida es la cantidad de tubería perimetral, $y + 4x = 300 \rightarrow y = 300 - 4x$. Al sustituir lo que nos da y en el área que se quiere maximizar $A(x, y)$ resulta una nueva función que depende únicamente de la variable x: $A(x) = x(300 - 4x) = 300x - 4x^2$. Derivando esta función continua podemos encontrar los máximos y los mínimos, $A'(x) = 300 - 8x$. Igualando a 0 obtenemos el valor de x: $300 - 8x = 0 \rightarrow x = 37.5$ m. Para comprobar que se trata de un máximo debemos sustituir en la segunda derivada $A''(x) = -8 < 0$. Se trata de un máximo, por lo tanto las dimensiones que maximizan el huerto son $x = 37.5$ m e $y = 150$ m.
- Si se da la solución usando derivadas: 3 puntos.
- Si se da la solución o se usan derivadas pero hay un error: 2 puntos.
- Si se exponen algunos conceptos correctos: 1 punto.

Actividad competencial 10. Consumo del automóvil

1. 8 L cada 100 km, por lo tanto, 16 L en 200 km.

2. 2 puntos por c) y f). 1 punto por c) o f).

3. a) V, b) F, c) V, d) V
- Si se contestan todas correctamente: 2 puntos.
- Si hay un error: 1 punto.

4. 

Parábola de vértice (50, 5.5).
• Si dibuja la gráfica y el vértice: 2 puntos.
• Si hay un error: 1 punto.

5. $C'(x) = 0.002x - 0.1$. Averiguando cuándo la derivada es positiva y cuándo es negativa, podemos saber cuándo la función es creciente y cuándo es decreciente. Averiguando cuándo se anula pueden obtenerse los posibles máximos y mínimos. En este caso la derivada es negativa y por lo tanto la función consumo $C(x)$ es decreciente desde $x = 0$ (pues no tiene sentido hablar de velocidades negativas en este caso) hasta $x = 50$ km/h. La derivada es positiva, por tanto la función consumo $C(x)$ es creciente desde $x = 50$ km/h. Para $x = 50$ km/h hay un mínimo, pues se trata de una función continua que antes de este valor decrece y después crece.
• Si se explica la derivada, el crecimiento, el decrecimiento y el mínimo: 3 puntos. / • Si falta una respuesta: 2 puntos. / • Si hay algo bien: 1 punto.

Actividad competencial 11. Unas cajas para pizzas

1. d)

2. 2 puntos por b) y c). 1 punto por b) o c).

3. Hay muchos problemas de optimización de geometría donde la solución es una figura regular. Pero no en este caso, al tener distinto valor el precio de los materiales (las caras laterales son más caras).
• Si se explica que en parte tiene razón pero que en este caso no se cumple: 2 puntos.
• Si aparece una de las dos ideas: 1 punto.

4. La función que hay que maximizar es la función volumen $V(x, y) = x^2 \times y$. Como el precio de la caja debe ser 96 pisas: $96 = 0.01 \times 2x^2 + 0.1 \times 4xy$. Se multiplica por 100 para eliminar los decimales $9600 = 2x^2 + 40xy$. Se aísla y obteniéndose $y = \frac{9600 - 2x^2}{40x}$. De modo que la función volumen es $V(x) = x^2 \times \frac{9600 - 2x^2}{40x} = \frac{1}{40}(9600x - 2x^3)$. Para calcular el máximo se deriva: $V'(x) = \frac{1}{40}(9600 - 6x^3)$. Igualamos a 0 y obtenemos $x = 40$. La segunda derivada para $x = 40$ es negativa, por tanto $x = 40$ cm y sustituyendo resulta $y = 4$ cm.
• Si se calculan usando derivadas: 2 puntos.
• Si hay un error o no se usan derivadas: 1 punto.

5. La función que hay que minimizar es la función área del cilindro $A(r, h) = \pi r^2 + 2\pi r h$. El dato que conocemos es el volumen $500 = \pi r^2 h$, de donde a $h = \frac{500}{\pi r^2}$. Por lo tanto $A(r) = \pi r^2 + 2\pi r \frac{500}{\pi r^2} = \pi r^2 + 1000\,\frac{1}{r}$. Derivando queda: $A'(r) = 2\pi r + 1000\,\frac{-1}{r^2}$. Se iguala a 0 la derivada y se obtiene: $r = \sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}} = 5.42$ cm. Sustituyendo en la segunda derivada da positivo, por lo tanto se trata de un mínimo. La altura es $h = \frac{500}{\pi\left(\sqrt[3]{\frac{1000}{2\pi}}\right)^2} = 5.42$ cm.
• Si se da la solución razonadamente: 3 puntos.
• Si solo se comete un error: 2 puntos.
• Si como mínimo se calcula $A(r)$: 1 punto.

Actividad competencial 12. La epidemióloga

1. a)

2. b)

3. A largo plazo el número de enfermos va disminuyendo. Dentro de 1 año quedarán unos 13 enfermos y dentro de 2 años solo 6 enfermos. En 15 años el número de enfermos resultaría menor que 1. Efectivamente hay una asíntota, en este caso, $y = 0$.
• Si aparecen las dos respuestas justificadas: 2 puntos.
• Si solo hay una respuesta justificada: 1 punto.

4. La derivada simplificada de la función $E(x) = \frac{5000x}{(x+5)^2}$ es $E'(x) = \frac{5000 \times (x+5) - 5000 \times x \times 2}{(x+5)^3}$. Como se trabaja con días, el denominador de la derivada siempre es positivo. De modo que la derivada va a ser positiva o negativa y por tanto la función creciente o decreciente, dependiendo únicamente del numerador. $E'(x) = 0 \rightarrow x = 5$. Dando valores o usando una tabla de signos se observa que la función es creciente desde $x = 0$ hasta $x = 5$ y decreciente a partir de $x = 5$.
• Si calcula la derivada y da los intervalos: 2 puntos.
• Si hay un error: 1 punto.

5. Para calcular el máximo igualamos la derivada a 0, cuya solución es $x = 5$. Para esta abscisa se obtiene el punto (5, 250). Hay una asíntota horizontal $y = 0$. La gráfica es de la forma:

Hay un punto de inflexión pues hay un cambio de curvatura.
• Si la respuesta está completa: 3 puntos. / • Si hay un error: 2 puntos. / • Si hay dos errores: 1 punto.